宾汉钻井液圆管轴向层流压降的数值计算

高远文[1]，鲁　港[2]，杨　龙[1]，佟长海[1]，孙忠国[1]
(1. 中国石油长城钻探工程有限公司工程技术研究院，辽宁 盘锦 124010；2. 中国石油辽河油田公司勘探开发研究院，辽宁 盘锦 124010)

摘　要：在计算宾汉钻井液在钻具中的层流压降时，需要求解一个非线性方程，以往通常使用近似公式进行计算。对于求解这个非线性方程，提出了一个数值迭代算法，并对该算法的收敛性进行了证明，给出了最大迭代步数的上限值。理论分析和大量实际算例表明：本文算法具有非常稳定的收敛性和非常快的收敛速度，并且能够给出压降的精确计算值。

关键词：钻井；水力参数；宾汉钻井液；层流；数值计算

中图分类号：TE254　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672－7428(2010)03－0005－03

Numerical Calculation for Axial Laminar Flow Pressure Drop of the Bingham Drilling Fluid in Circular Pipe/*GAO Yuan-wen*[1], *LU Gang*[2], *YANG Long*[1], *TONG Chang-hai*[1], *SUN Zhong-guo*[1] (1. Engineering & Technology Research Institute, Great Wall Drilling Corporation, PetroChina, Panjin Liaoning 124010, China; 2. Exploration & Development Research Institute, Liaohe Oilfield Company, PetroChina, Panjin Liaoning 124010, China)

Abstract: For the calculation of laminar flow pressure drop of the Bingham drilling fluid in the drilling tools, we need to solve a non-linear equation, which is usually done by an approximate formula. To solve this non-linear equation, a numerical iterative arithmetic is put forward and the convergence of the arithmetic is demonstrated to give the upper limit of maximum iterative steps. By many actual cases and theoretical analysis, it shows that the arithmetic in this paper has a very stable convergence and very fast convergent speed with accurate calculated value of pressure drop.

Key words: drilling; hydraulic parameters; Bingham drilling fluid; laminar flow; numerical calculation

在钻井水力参数计算和优化设计等问题中，钻具内及环空中的压降计算是基本的计算。除了与钻具、环空的几何参数有关之外，钻井液的流变性质是影响压降的主要因素。不同类型的钻井液其流变性质是不同的，目前常用的描述钻井液流变性质的模型主要有5种：牛顿模型、宾汉模型、幂律模型、赫－巴模型和卡森模型。关于不同流变模型下的压降计算目前已有很多研究成果[1]。本文对宾汉模型下的钻具内层流压降计算进行了详细的研究。在宾汉模型下，层流压降满足一个4次代数方程；在一定的条件下可以得到压降的一个近似公式[2]。本文的研究表明，这个近似公式的计算误差随着钻具长度而增大。尽管可以使用代数方程求解理论求出压降的精确计算公式[3]，但是在计算机编程计算时很麻烦，并且该方法很特殊，仅适用于宾汉模型。本文提出了求解压降方程的一个数值迭代方法，对其收敛性给出了严格的数学证明；并与以往使用的近似计算公式进行了对比分析。

1　非牛顿流体圆管轴向层流压降

假设所研究的非牛顿流体的本构方程可一般地表示为：

$$\gamma = f(\tau)$$

式中：γ——剪切速率，s^{-1}；τ——剪切应力，MPa；$f(\ )$——一般的连续函数。

从动量守恒定律，得：

$$\tau = [\Delta p/(2L)]r \tag{1}$$

式中：Δp——压降，MPa；L——圆管长度，m；r——离开圆管轴心的距离，m。

在一定压力梯度下，剪切应力τ与r成正比；在管壁处切应力有最大值：

$$\tau_w = [\Delta p/(2L)]R \tag{2}$$

式中：R——圆管半径，m；τ_w——最大剪切应力值，MPa。

收稿日期：2009－09－04

基金项目：国家科技重大专项“大型油气田及煤层气开发”之课题21－6“钻井工程设计和工艺软件”(编号：2008ZX05021－006)资助

作者简介：高远文(1965－)，男(汉族)，四川内江人，中国石油长城钻探工程有限公司工程技术研究院院长、高级工程师，石油工程专业，博士，从事石油钻井理论研究及管理工作，辽宁省盘锦市兴隆台区；鲁港(1963－)，男(汉族)，辽宁锦州人，中国石油辽河油田公司勘探开发研究院高级工程师，应用数学、钻井工程、勘探开发专业，硕士，从事石油钻探领域数学模型及算法的理论研究和计算机软件开发工作，辽宁省盘锦市兴隆台区石油大街95号，Lugang1963@163.com。

文献[1]给出了下面的计算公式：

$$u(r)=\frac{R}{\tau_w}\int_{\tau}^{\tau_w} f(\tau)\,d\tau \qquad (3)$$

$$Q=\frac{\pi R^3}{\tau_w{}^3}\int_{0}^{\tau_w} f(\tau)\tau^2\,d\tau \qquad (4)$$

$$V=Q/(\pi R^2) \qquad (5)$$

式中：$u(r)$——流体的速度分布函数，ms^{-1}；Q——流量，$m^3 s^{-1}$；V——平均流速，ms^{-1}。

从式(2)得到压降的计算公式：

$$\Delta p=2L\tau_w/R \qquad (6)$$

式(6)即是非牛顿流体圆管轴向层流压降的一般计算公式；参数 τ_w 需要从方程(4)解出。

2 宾汉流体圆管轴向层流压降

宾汉流体的本构方程为[1]：

$$\gamma=f(\tau)=\begin{cases}(\tau-\tau_0)/\eta_s, & \tau>\tau_0\\ 0, & \tau\leqslant\tau_0\end{cases}$$

式中：τ_0——屈服值，MPa；η_s——塑性粘度，mPa·s。

将上式代入式(4)，得：

$$Q=\frac{\pi R^3\tau_w}{4\eta_s}\left(1-\frac{4\tau_0}{3\tau_w}+\frac{\tau_0{}^4}{3\tau_w{}^4}\right)$$

当 $\tau_0=0$ 即本构方程退化成牛顿模式时，得：

$$\tau_w=4Q\eta_s/(\pi R^3)$$

代入式(6)得到牛顿模式的压降公式：

$$\Delta p=8LQ\eta_s/(\pi R^4)$$

当 $\tau_0>0$ 时，记：

$$\xi=\tau_0/\tau_w,\quad F(\xi)=1-(4/3)\xi+(1/3)\xi^4$$

则有：

$$Q=[\pi R^2\tau_0/(4\eta_s\xi)]F(\xi) \qquad (7)$$

再记：

$$a=4Q\eta_s/(4\pi R^3\tau_0)=4V\eta_s/(R\tau_0)$$

则得到 ξ 的方程如下：

$$a\xi=F(\xi) \qquad (8)$$

方程(8)称为压降计算的特征方程，简称特征方程。

从特征方程中求出满足 $0<\xi<1$ 的正实数解 ξ，再按下式计算压降：

$$\Delta p=2L\tau_0/(R\xi) \qquad (9)$$

3 特征方程的数值求解

特征方程是关于未知数 ξ 的 4 次代数方程，可以使用 4 次代数方程的求根公式求出其解析解[3]，但是计算过程很麻烦。这里给出一个数值求解的方法。

在 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 区间上，函数 $F(\xi)$ 是单调下降函数，参见图 1。并且容易验证：$F(0)=1$，$F(1)=0$。特征方程的解 ξ 可以看成是曲线 $y=F(\xi)$ 与直线 $y=a\xi$ 的交点的横坐标值。

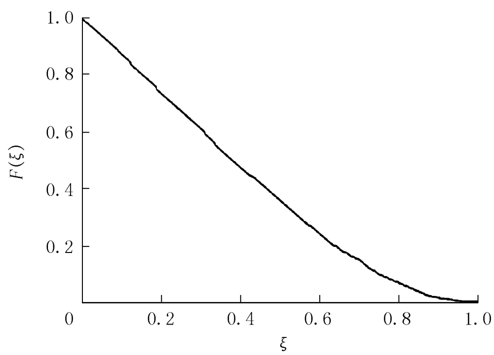

图 1 函数 $F(\xi)$ 的图像

记：$b=1/(3a+4)$，则 $b<1/4$。构造下面的迭代算法：

$$\begin{cases}\xi_0=0\\ \xi_k=b(3+\xi_{k-1}^4), & k=1,2,\Lambda\end{cases} \qquad (10)$$

首先可以证明迭代序列 $\{\xi_k\}$ 是有界的：

$$3b\leqslant\xi_k<4b,\text{当 } k>0$$

其次，对于任意给定的正整数 $m>0$，有：

$$\begin{aligned}&\xi_{k+m}-\xi_k=b(\xi_{k-1+m}^4-\xi_{k-1}^4)\\ &=b(\xi_{k-1+m}^2+\xi_{k-1}^2)(\xi_{k-1+m}+\xi_{k-1})(\xi_{k-1+m}-\xi_{k-1})\\ &<4b(\xi_{k-1+m}-\xi_{k-1})<\Lambda<(4b)^k(\xi_m-\xi_0)\\ &<(4b)^{k+1}\end{aligned}$$

因 $4b<1$，根据序列收敛的 Cauchy 收敛准则[4]，可知迭代序列 $\{\xi_k\}$ 是收敛的。

假设迭代序列 $\{\xi_k\}$ 收敛到 ξ^*，易知：

$$|\xi_k-\xi_*|<(4b)^k$$

令收敛允许误差为 ε，则最大迭代步数为：

$$1+\log_2\varepsilon/(2+\log_2 b)$$

4 压降的近似计算公式

由于 $0<\xi<1$，可知 ξ^4 很小。在特征方程中忽略 ξ^4 项，得到：

$$a\,\xi\approx1-(4/3)\xi$$

求得：

$$1/\xi\approx a+4/3$$

代入式(9)，得到压降的近似计算公式：

$$\Delta p\approx8VL\eta_s/R^2+8L\tau_0/(3R) \qquad (11)$$

假设特征方程的精确解为 ξ^*，对应计算出的压降为 Δp；近似公式(11)计算出的压降为 $\Delta p'$，则有：

$$\Delta p-\Delta p'=2L\tau_0/(3R)\cdot\xi^{*3}$$

可见,虽然 ξ^{*3} 很小,但是当管长 L 很大时,$L\xi^{*3}$ 不是小量。所以,近似压降公式在管长较长时会产生较大的计算误差。

相对误差为:

$$\delta = (\Delta p - \Delta p')/\Delta p = (1/3)\xi^{*4}$$

从图 1 可以看出,当直线系数 a 增大时,解 ξ^* 随之减小。而 a 与流量 Q 成正比,所以,当流量减小时,相对误差 δ 也随之增大。

5　雷诺数

广义雷诺数的定义[1]:

$$R_e = 2\rho RV/\mu_N$$

式中:μ_N——视牛顿粘度,满足下式:

$$\Delta p = 2L\tau_0/(R\ \xi) = 8\mu_N LV/R^2$$

所以:

$$\mu_N = R\tau_0/(4V\xi) \tag{12}$$

式(12)是宾汉流体圆管轴向层流雷诺数的精确计算公式。如果在特征方程中忽略 ξ^4 项,得到雷诺数的近似计算公式:

$$\mu_N' = \frac{R\tau_0}{4V}\left(a + \frac{4}{3}\right) = \eta_s + \frac{R\tau_0}{3V} \tag{13}$$

易知:

$$\mu_N'/\mu_N = 1 + (1/3)\xi^4$$

可见,使用近似公式计算的雷诺数要小于其真实值。

6　数值分析及算例

图 2 给出了特征方程的解 ξ 与方程中的参数 a 之间的变化曲线,从图中可以看出,解 ξ 与参数 a 之间的变化曲线类似于第一象限中的双曲线。

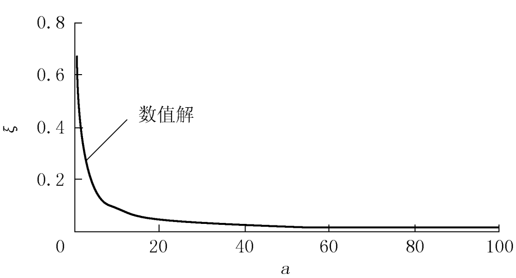

图 2　特征方程的解 ξ 与参数 a 的关系曲线

图 3 给出了参数 a 很小时的数值解与近似解的变化曲线,可以发现:当参数 a 很小时,近似解与精确解之间有显著的差异。

算例:钻具长度 $L = 2525$ m,内径 $R = 54.3$ mm,

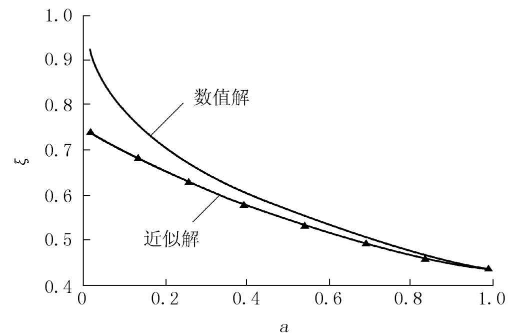

图 3　特征方程的精确解和近似解与参数 a 的关系曲线

流量 $Q = 28.2$ L/s,宾汉模型参数:$\tau_0 = 4.15$ Pa,$\eta_s = 0.028$ Pa·s。

使用本文方法得到的压降为 1.0956 MPa,使用近似公式(11)得到的压降为 1.1011 MPa,相对误差为 5.1‰。迭代过程中解随迭代步变化的情况见图 4。只需要 10 步左右迭代就得到特征方程稳定数值解。

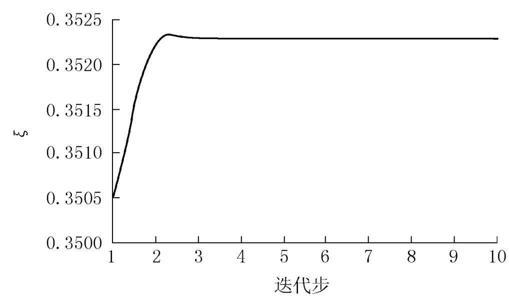

图 4　特征方程的解随迭代步的变化曲线

7　结论

(1)宾汉钻井液在钻具中的层流压降满足一个非线性方程,需要使用数值方法进行求解。本文提出了一个迭代算法,并对其收敛性给出了严格的数学证明;得到了最大迭代步数的上限值。

(2)理论分析和实际算例表明,本文方法具有非常稳定的收敛性能和非常快的收敛速度。

(3)使用数值迭代方法计算压降比近似计算公式更精确。在计算机软件编程中宜用数值方法代替以往使用的近似计算公式。

参考文献:

[1]　张景富.钻井流体力学[M].北京:石油工业出版社,1994.
[2]　曾春元.宾汉流体水力参数优化程序设计方法[J].石油钻探技术,1994,22(1):48-50.
[3]　陈尚伟.宾汉塑性流体层流压强降的分析解[J].化学世界,1990,45(8):369-372.
[4]　欧阳光中,朱学炎,秦曾复.数学分析(上册)[M].上海:上海科学技术出版社,1983.