二维圆弧型井眼轨道设计问题的通解

鲁　港[1], 王立波[2], 王冠军[2], 张欣水[3]

(1. 中国石油辽河油田公司勘探开发研究院,辽宁 盘锦 124010; 2. 中国石油长城钻探公司第二钻井分公司,辽宁 盘锦 124010; 3. 辽河石油勘探局市场管理部,辽宁 盘锦 124010)

摘　要:二维圆弧型井眼轨道是常规定向井、水平井轨道设计优先考虑的剖面类型,应用比较广泛。但是由于井段组合形式很多,并且对于同一种井段组合还有很多种未知数求解组合,推导每种井段组合和求解组合情况下的解的计算公式的工作非常繁重和复杂。研究了任意井段组合和任意求解组合的通解问题,发现井眼轨道设计问题的约束方程组可以化归成线性代数方程组或者 4 种典型方程组之一;得到了 4 种典型方程组的实数解的计算公式,并给出了有实数解的判别条件。对于二维圆弧型井眼轨道设计问题的基础理论研究和计算机软件开发都有重要的意义。

关键词:二维;井眼轨道;解析解;圆弧;钻井设计

中图分类号:TE22　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672－7428(2009)01－0009－05

General Solution of 2D Arc Well Trajectory Design/*LU Gang*[1], *WANG Li-bo*[2], *WANG Guan-jun*[2], *ZHANG Xin-shui*[3]

(1. Exploration and Development Research Institute of Liaohe Oilfield Company, PetroChina, Panjin Liaoning 124010, China; 2. No. 2 Drilling Branch of Great Wall Drilling Engineering Company, PetroChina, Panjin Liaoning 124010, China; 3. Market Management Department of Liaohe Petroleum Exploration Bureau, Panjin Liaoning 124010, China)

Abstract: 2D arc well trajectory is considered with priority in conventional deviated and horizontal well design. However, because there are a lot of combination forms of hole sections and also a lot of resolution combinations of unknowns for the same hole section, the computation is very complicated to derive the computation formula for the solutions of each hole section combination and each solving combination. This paper studies the general solutions of arbitrary hole section combination and arbitrary solving combination, discovers that the constraint equation of hole trajectory design can be dissolved into linear algebra equation system or one of the four typical systems of equations. The computation formula of the real number solutions of the four typical equation systems is obtained and the discretion conditions of real number solution are given. This study has important significance for fundamental research and computer software development for 2D arc borehole trajectory design.

Key words: 2D; well trajectory; analytical solution; arc; well design

井眼轨道设计是钻井的首要环节,在设计时应根据油藏的构造特征和油气产状,以有利于提高油气产量和采收率为目标。在满足钻井目的要求的前提下,应尽可能选用形状简单、易于施工的井眼轨道,减少井眼轨道控制的难度和工作量,从而实现安全、优质、快速、低耗钻井。根据上述的井眼轨道设计原则,在没有特殊要求的情况下,井眼轨道一般都设计成二维的,即设计轨道位于给定方位上的铅垂平面内[1]。

二维井眼轨道主要以圆弧型轨道为主,即井眼轨道由多个井段光滑连接而成,其中井段可以是稳斜段(直井段和水平井段可看成其特例),也可以是增斜段或降斜段;增(降)斜段为一段圆弧,因此统称为圆弧井段。二维圆弧型井眼轨道广泛应用于各种定向井、水平井设计中,对于常用的轨道类型,如定向井的 J 形剖面和 S 形剖面,水平井的双增剖面、三增剖面等,已经建立了解析求解公式。但是由于稳斜井段与圆弧井段的组合形式非常多,而且对同一种井段组合要求解的未知数还有许多种不同的组合,如果对每种组合都建立一套求解公式,将是非常繁重的工作。因此,追求通用的求解公式或方法,引起了很多研究者的注意[2~4]。

1　前人研究成果综述

最早求解二维轨道设计问题时,总是针对某个具体的轨道类型进行求解,并且针对每个具体设计

收稿日期:2008－05－20

基金项目:中国石油天然气股份公司油气勘探超前共性科技项目“辽河探区西部凹陷深化勘探理论与实践”(编号:07－01C－01－04)

作者简介:鲁港(1963－),男(汉族),辽宁锦州人,中国石油辽河油田公司勘探开发研究院高级工程师,应用数学、计算机软件工程专业,硕士,从事石油钻探数学模型研究及计算机软件开发等工作,辽宁省盘锦市兴隆台区辽河油田勘探开发研究院勘探数据中心,Lugang1999@hotmail.com。

问题都能推导出解的解析计算公式。随着实际钻井设计问题中涉及到的剖面类型越来越多,以及开发轨道设计计算机程序的需要,人们希望找到一种通用的方法来求解任何剖面设计问题。

通解是针对特解而言的,我们把针对每个具体剖面设计问题的解称为特解,而把适用于每种剖面设计问题的解称为通解。实际上,在求通解时,总是将某些具有同样特征的剖面设计问题归为一类,给出这类问题的统一解法。

鲁港[2]最早发现,在各种井段组合情况下,如果2个未知数都是井斜角,或者一个未知数是井斜角、另一个未知数是稳斜段长度,则二元方程组都可以归结为2种形式相同的三角方程组,并给出了解的解析计算公式。崔红英等[3]给出了计算稳斜段长度和井斜角的"通用"公式,但是由于不能涵盖所有的圆弧型剖面,因此其方法不具有普适性。唐雪平等[4]对于五段制"直-增-稳-增(降)-稳"型井眼轨道的28种不同求解组合给出了计算公式,但是对于象"直-增-增(降)-增(降)-增(降)"这样的其他类型井眼轨道的不同求解组合并没有给出计算公式。刘修善等[1,5]研究了任意井段数的二维圆弧型井眼轨道设计问题的通用方法,在其解析设计方法中,按照未知数的不同组合,将设计问题的求解化归成6类求解组合。然而,无论是在其专利说明书[5]中,还是在其专著[1]中,都没有6类求解组合的具体求解过程或解的计算公式,而是仅仅指出"毫无疑问,根据约束方程,可以推导出上述6类求解组合的全部解"。尽管文献[1,5]的研究成果可能是目前解决二维圆弧型轨道设计问题的最好的、最普适的方法,但是由于没有公布方法细节,按照国际惯例,二维圆弧型轨道设计问题的通解问题仍是一个未被彻底解决的问题。

本文根据二维圆弧型轨道设计问题的求解变量的6种不同组合,将设计约束方程组归结为线性代数方程组和4个标准形式的方程组,并给出了这4个标准形式方程组的解的解析计算公式,从而为二维圆弧型轨道设计的通解问题给出了一个完满的答案。

2 二维轨道设计问题

在本文公式中,长度量纲参数的单位为米,角度单位为弧度,不再赘述。

二维圆弧型轨道是设计方位面上的连续光滑的分段曲线。每个井段可以是稳斜井段或圆弧井段(增斜段或降斜段),稳斜井段与圆弧井段或者圆弧井段与圆弧井段在它们的公共点相切。

井眼轨道上任意点的井斜角记为α,垂深记为Z,水平位移记为S,井深记为L;圆弧井段的曲率记为K。假设井段个数为N,从1开始编号;井段端点共有$N+1$个,从0开始编号。第n个端点处的参数其下标记为n,例如Z_n是第n个端点的垂深。与第n个井段有关的参数其下标记为n,例如,第n个井段的段长为ΔL_n。符号Δ总是表示2个下标隔为1的变量的前向差$\Delta\eta_n=\eta_n-\eta_{n-1}$,符号$\Delta'$表示2个下标相隔为2的变量的前向差$\Delta'\eta_n=\eta_n-\eta_{n-2}$。

如果第n段是稳斜段,则有$\alpha_n=\alpha_{n-1}$,并且:

$$\Delta Z_n=\Delta L_n\cos\alpha_{n-1} \tag{1}$$

$$\Delta S_n=\Delta L_n\sin\alpha_{n-1} \tag{2}$$

如果第n段是圆弧井段,则有:

$$\Delta Z_n=R_n(\sin\alpha_n-\sin\alpha_{n-1}) \tag{3}$$

$$\Delta S_n=R_n(\cos\alpha_{n-1}-\cos\alpha_n) \tag{4}$$

式中$R_n=1/K_n$(增斜段),或者$R_n=-1/K_n$(降斜段),尽管R_n可正可负,仍称R_n为圆弧井段的半径。

假设给定靶点的垂深为Z_t、水平位移为S_t,定义:

$$\gamma_t=\begin{pmatrix}Z_t\\S_t\end{pmatrix},\ \gamma_n=\begin{pmatrix}\Delta Z_n\\\Delta S_n\end{pmatrix},\ f_E=\gamma_t-\sum_{\substack{k=1\\k\notin E}}^{N}\gamma_k$$

其中E是任意给定的下标集合。如果集合E的元素个数比较少,例如,$E=\{m,n\}$,常将f_E写为$f_{m,n}$。

使用上述符号之后,二维圆弧型轨道设计问题归结为求解下面的约束方程组:

$$\sum_{n=1}^{N}\gamma_n=\gamma_t \tag{5}$$

3 归结为典型方程组

如果第n井段和第$n+1$井段都是圆弧井段,则在两者之间插入一个段长为0的稳斜井段,这样处理之后,原来的井眼轨道变成稳斜井段与圆弧井段相间的形式。如果第1井段是圆弧井段,则在第1井段之前插入一个段长为0的稳斜井段;如果最后一个井段是圆弧井段,则在最后再增加一个段长为0的稳斜井段。于是,井眼轨道扩展成"稳斜-圆弧-稳斜-圆弧-……-稳斜-圆弧-稳斜"的规范形式,其中稳斜井段的长度可能为0。井段个数为$N=2M-1$,其中M是稳斜井段的个数。圆弧井段的编号为偶数,稳斜井段的编号为奇数。

圆弧井段半径和末端井斜角的下标为偶数;稳斜井段的下标为奇数。

通解方法是按照不同的井段组合和不同的未知数组合,将约束方程组化归为若干求解组合类,然后针对每个求解组合类推导出约束方程组(5)的解的解析计算公式。

为行文方便,简记:$s_n=\sin\alpha_n$,$c_n=\cos\alpha_n$,$u_m=\begin{pmatrix} s_{2m} \\ c_{2m} \end{pmatrix}$,$v_m=\begin{pmatrix} s_{2m} \\ -c_{2m} \end{pmatrix}$,$w_m=\begin{pmatrix} c_{2m} \\ s_{2m} \end{pmatrix}$

显然有:

$$v_m=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}u_m,\quad w_m=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}u_m$$

下面按照文献[1]的思路,将求解组合分成6类。每类求解组合的解析解的计算公式是本文首先得到的。

3.1 未知变量为 α_{2m} 和 α_{2n} 时

补充定义 $R_0=R_{2M}=0$。记

$$r_m=R_{2m}-R_{2m+2},\ l_m=\Delta L_{2m+1},\ D_m=\begin{pmatrix} r_m & l_m \\ l_m & -r_m \end{pmatrix}$$

则有:

$$\sum_{n=1}^{N}\gamma_n=\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\begin{pmatrix} R_{2m}(s_{2m}-s_{2m-2}) \\ R_{2m}(c_{2m-2}-c_{2m}) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \Delta L_{2m+1}c_{2m} \\ \Delta L_{2m+1}s_{2m} \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\begin{pmatrix} R_{2m} & \Delta L_{2m+1} \\ \Delta L_{2m+1} & -R_{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{2m} \\ c_{2m} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -R_{2m} & 0 \\ 0 & R_{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{2m-2} \\ c_{2m-2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\begin{pmatrix} R_{2m} & l_m \\ l_m & -R_{2m} \end{pmatrix}u_m+\sum_{m=0}^{M-1}\begin{pmatrix} -R_{2m} & 0 \\ 0 & R_{2m} \end{pmatrix}u_{m-1}$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\begin{pmatrix} R_{2m} & l_m \\ l_m & -R_{2m} \end{pmatrix}u_m+\sum_{m=-1}^{M-2}\begin{pmatrix} -R_{2m+2} & 0 \\ 0 & R_{2m+2} \end{pmatrix}u_m$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\begin{pmatrix} r_m & l_m \\ l_m & -r_m \end{pmatrix}u_m$$

所以,方程组(5)可以写成下面的形式:

$$\sum_{m=0}^{M-1}D_m u_m=\gamma_t \tag{6}$$

对于任意给定的下标集合 E,定义:

$$g_E=\gamma_t-\sum_{\substack{k=0 \\ k\notin E}}^{M-1}D_k u_k$$

如果集合 E 的元素个数比较少,例如,$E=\{m,n\}$,常将 g_E 写为 $g_{m,n}$。

可见,当未知数为 α_{2m} 和 α_{2n} 时,方程组(5)可以改写成下面的形式:

$$D_m u_m+D_n u_n=g_{m,n}$$

称上面的方程组为(Ⅰ)型典型方程组,其解的解析计算公式见本文第4部分。

3.2 未知变量为 α_{2m} 和 R_{2n} 时

在方程组(6)中,包含 α_{2m} 的项为 $D_m u_m$,包含 R_{2n} 的项为 $D_n u_n$ 和 $D_{n-1}u_{n-1}$。定义

$$G_n=\begin{pmatrix} -R_{2n+2} & l_n \\ l_n & R_{2n+2} \end{pmatrix},\ H_{n-1}=\begin{pmatrix} -R_{2n-2} & l_{n-1} \\ l_{n-1} & -R_{2n-2} \end{pmatrix}$$

则有:

$$D_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}R_{2n}+G_n,\ D_{n-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}R_{2n}+H_{n-1}$$

显然,G_n 和 H_{n-1} 于未知数 R_{2n} 无关。

当 $m\neq n$ 且 $m\neq n-1$ 时,方程组(6)可以改写成下面的形式:

$$D_m u_m+D_n u_n+D_{n-1}u_{n-1}=g_{m,n,n-1}$$

将与要求解的未知数无关的项移到等式右端,得到:

$$D_m u_m+R_{2n}\delta v_n=g_{m,n,n-1}-G_n u_n-H_{n-1}u_{n-1} \tag{7}$$

当 $m=n-1$ 时,方程组(6)可以改写成下面的形式:

$$D_m u_m+D_n u_n=g_{m,n}$$

将与要求解的未知数无关的项移到等式右端,得到:

$$\begin{pmatrix} R_{2m}-R_{2n} & l_m \\ l_m & R_{2n}-R_{2m} \end{pmatrix}u_m+R_{2n}v_n=g_{m,n}-G_n u_n \tag{8}$$

当 $m=n$ 时,方程组(6)可以改写成下面的形式:

$$D_m u_m+D_{m-1}u_{m-1}=g_{m,m-1}$$

将与要求解的未知数无关的项移到等式右端,得到:

$$\begin{pmatrix} R_{2(n+1)}-R_{2n} & -l_n \\ -l_n & R_{2n}-R_{2(n+1)} \end{pmatrix}u_m+R_{2n}v_{n-1}$$
$$=H_{n-1}u_{n-1}-g_{m,n-1} \tag{9}$$

称方程组(7)为(Ⅱ)型典型方程组,方程组(8)和方程组(9)为(Ⅲ)型典型方程组。其解的解析计算公式见本文第4部分。

3.3 未知变量为 α_{2m} 和 ΔL_{2n+1} 时

在方程组(6)中,包含 α_{2m} 的项为 $D_m u_m$,包含 ΔL_{2n+1} 的项为 $D_n u_n$,所以,当 $m\neq n$ 时,方程组(6)可以改写成下面的形式:

$$D_m u_m+\Delta L_{2n+1}w_n=g_{m,n}-r_n v_n \tag{10}$$

当 $m=n$ 时,方程组(6)可以改写成下面的形式:

$$\begin{pmatrix} r_m & \Delta L_{2n+1} \\ \Delta L_{2n+1} & -r_m \end{pmatrix}u_m=g_m \tag{11}$$

方程组(10)为前述(Ⅱ)型典型方程组,称方程

组(11)为(Ⅳ)型典型方程组,其解的解析计算公式见本文第 4 部分。

3.4 未知变量为 R_{2m} 和 R_{2n} 时

记: $A_{mn}=\left(\Delta v_m,\Delta v_n\right)$, $x=\begin{pmatrix}R_{2m}\\R_{2n}\end{pmatrix}$

这时,方程组(5)可以改写成下面的形式:

$$A_{mn}x=f_{2m,2n}$$

这是二元线性代数方程组,使用标准解法[6]求解。

3.5 未知变量为 R_{2m} 和 ΔL_{2n+1} 时

记: $B_{mn}=\left(\Delta v_m,\Delta w_n\right)$, $y=\begin{pmatrix}R_{2m}\\\Delta L_{2n+1}\end{pmatrix}$

这时,方程组(5)可以改写成下面的形式:

$$B_{mn}y=f_{2m,2n+1}$$

这是二元线性代数方程组,使用标准解法[6]求解。

3.6 未知变量为 ΔL_{2m+1} 和 ΔL_{2n+1} 时

记 $C_{mn}=\left(w_m,w_n\right)$, $z=\begin{pmatrix}\Delta L_{2m+1}\\\Delta L_{2n+1}\end{pmatrix}$

这时,方程组(5)可以改写成下面的形式:

$$C_{mn}z=f_{2m+1,2n+1}$$

这是二元线性代数方程组,使用标准解法[6]求解。

从前面可知,当 2 个未知数都是长度变量时,方程组为线性代数方程组。

综上所述,方程组(5)按照未知数的不同组合,可以划分为 6 种求解组合,最后都归结为线性代数方程组的求解和 4 种典型方程组的求解。

4 典型方程组的解析解

在下文中,用 a、b、c、d、e、f、β 等表示已知常数,用 x、y 表示未知数。记:

$$A=a^2+b^2,B=c^2+d^2,C=e^2+f^2$$

4.1 典型三角方程

研究发现,(Ⅰ)~(Ⅳ)型典型方程组都可以归结为下面的典型三角方程的求解:

$$a\sin x+b\cos x=c \tag{12}$$

这个三角方程的解析解法在一般的高中教科书上都有介绍,这里为了完整起见,对其解法进行简单回顾。当 $a^2+b^2\geqslant c^2$ 且 $a^2+b^2\neq 0$ 时,方程(12)有实数解。令 $t=\tan(x/2)$,利用三角公式:

$$\sin x=2t/(1+t^2),\cos x=(1-t^2)/(1+t^2)$$

方程(12)可以转换成一元二次方程:

$$(b+c)t^2-2at+c-b=0$$

在有实数解的情况下,用二次方程求根公式求出 2 个实数解。再从 $x=2\arctan t$ 解出 x_1 和 x_2。如果对解的取值范围有要求,还要根据取值范围对 x_1 和 x_2 进行取舍。

4.2 (Ⅰ)型典型方程组的标准解法

方程组形式如下:

$$\begin{cases}a\sin x+b\cos x+c\sin y+d\cos y=e\\b\sin x-a\cos x+d\sin y-c\cos y=f\end{cases}$$

x 和 y 分别满足下面的典型三角方程:

$$(ae+bf)\sin x+(be-af)\cos x=(C+A-B)/2$$

$$(ce+df)\sin y+(de-cf)\cos y=(C-A+B)/2$$

有实数解的必要条件是:$|A-B+C|\leqslant 2\sqrt{AC}$, $|A-B-C|\leqslant 2\sqrt{BC}$,$A>0$,$B>0$,$C>0$

4.3 (Ⅱ)型典型方程组的标准解法

方程组形式如下:

$$\begin{cases}a\sin x+b\cos x+cy=e\\b\sin x-a\cos x+dy=f\end{cases}$$

x 满足下面的典型三角方程:

$$(ad-bc)\sin x+(ac+bd)\cos x=de-cf$$

y 满足下面的二次方程:

$$By^2-2(ce+df)y+C-A=0$$

有实数解的必要条件是:$(cf-de)^2\leqslant AB$,$A\neq 0$,$B\neq 0$。

4.4 (Ⅲ)型典型方程组的标准解法

方程组形式如下:

$$\begin{cases}(a-y)\sin x+b\cos x+y\sin\beta=e\\b\sin x-(a-y)\cos x-y\cos\beta=f\end{cases}$$

x 满足下面的典型三角方程:

$$(f+a\cos\beta+b\sin\beta)\sin x+(e-a\sin\beta+b\cos\beta)\cos x=b+e\cos\beta+f\sin\beta$$

y 满足下面的一次方程:

$$2(a-e\sin\beta+f\cos\beta)y-A+C=0$$

有实数解的必要条件是:$a\neq e\sin\beta-f\cos\beta$。

4.5 (Ⅳ)型典型方程组的标准解法

方程组形式如下:

$$\begin{cases}a\sin x+y\cos x=e\\y\sin x-a\cos x=f\end{cases}$$

x 满足下面的典型三角方程:

$$e\sin x-f\cos x=a$$

y 满足下面的二次方程:

$$y^2+a^2-C=0$$

有实数解的必要条件是:$C\geqslant a^2$。

4.6 通解定理

将上面的分析推导过程总结成下面的定理。

通解定理:对于任意给定的二维圆弧型轨道设计问题,每种求解组合都可以写成 5 种标准形式方程组之一。根据设计条件给出的具体数据,即可判断方程组是否有实数解。如果方程组有实数解,则解可以用解析计算公式来给出。

5 理论验证

五段制 S 形“直 - 增 - 稳 - 降 - 稳”剖面是最常用的二维剖面,其求解公式是已知的,我们用以验证本文通解公式的正确性。

假设求解参数为中间稳斜井段的段长 ΔL_3 和井斜角 α_2,这时 $m=1$, $n=1$, $\alpha_0=0$,约束方程组的具体形式如下:

$$\begin{pmatrix} R_2-R_4 & \Delta L_3 \\ \Delta L_3 & R_4-R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\alpha_2 \\ \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} Z_t \\ S_t \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -R_2 & \Delta L_1 \\ \Delta L_1 & R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\alpha_0 \\ \cos\alpha_0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} R_4 & \Delta L_5 \\ \Delta L_5 & -R_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\alpha_4 \\ \cos\alpha_4 \end{pmatrix}$$

即:

$$\begin{cases} R_0\sin\alpha_2+\Delta L_3\cos\alpha_2=H_0 \\ \Delta L_3\sin\alpha_2-R_0\cos\alpha_2=A_0-R_0 \end{cases} \tag{13}$$

式中:

$$R_0=R_2-R_4=1/K_2+1/K_4$$

$$H_0=Z_t-\Delta L_1-R_4\sin\alpha_4-\Delta L_5\cos\alpha_4$$

$$A_0=S_t-R_4+R_4\cos\alpha_4-\Delta L_5\sin\alpha_4。$$

方程组(13)为(Ⅳ)型典型方程组,当 $H_0^2+A_0^2\geqslant 2A_0R_0$ 时有实数解:

$$\Delta L_3=\sqrt{H_0^2+A_0^2-2A_0R_0}$$

$$\tan\frac{\alpha_2}{2}=\frac{H_0\pm\sqrt{H_0^2+A_0^2-2A_0R_0}}{2R_0-A_0}$$

对照文献[1]第 165 页的结果,上述计算公式与文献[1]给出的计算公式完全相同。

6 结论

(1)对于任意给定的二维圆弧型轨道设计问题,每种求解组合都可以写成线性方程组或者 4 种典型方程组之一。如果方程组有解,则解可以用解析计算公式来给出。

(2)对 4 种典型方程组,给出了详细的解析解公式。

(3)本文的通解方法特别适合于井眼轨道设计软件的开发,在常规定向井、水平井的二维剖面设计工作中有广泛的用途。

参考文献:

[1] 刘修善.井眼轨道几何学[M].北京:石油工业出版社,2006.

[2] 鲁港.常规二维定向井剖面计算的新方法[J].河南石油,1995,9(4):8-13.

[3] 崔红英,张建国,韩志勇.二维定向井轨迹设计的通用方程[J].钻采工艺,1999,22(4):6-8.

[4] 唐雪平,苏义脑.二维井眼轨道设计模型及其精确解[J].数学的实践与认识,2007,37(20):32-40.

[5] 刘修善,马开华,陈天成,等.一种钻井井眼轨道设计方法.中国,200510103356.9[P].2007-03-28.

[6] 编写组.数学手册[M].北京:人民教育出版社,1979.